

## ΤΟ ΚΥΜΑ, Η ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΚΑΙ Η ΦΑΣΗ

Εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά κατά μήκος ελαστικού μέσου που εκτείνεται στον άξονα  $x'ox$ . Τη χρονική στιγμή  $t=0$  το κύμα βρίσκεται στη θέση  $O$  ( $x_{(0)}=0$ ) όπου  $y_{(0)}=0$  και  $v_{(0)}>0$ . Η εξίσωση του αρμονικού κύματος είναι  $y=0,02\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$  (S.I). Τη χρονική στιγμή  $t=1s$  το σημείο  $A$

του μέσου στη θέση  $x_A=\frac{2}{3}m$  απέχει από τη θέση ισορροπίας  $\sqrt{3}10^{-2}m$  για  $4^{\eta}$  φορά. Την ίδια χρονική στιγμή το πλησιέστερο προς το  $A$  σημείο του μέσου που έχει την ίδια ταχύτητα (διανυσματικά) με αυτό, βρίσκεται σε θέση που απέχει από το  $A$  κατά τη διεύθυνση του μέσου απόσταση  $d=\frac{4}{3}m$ . Να

υπολογίσετε :

**α.** Την περίοδο του κύματος.

**β.** Το μήκος κύματος του κύματος.

**γ.** Τη ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

### ΛΥΣΗ

#### 1<sup>ος</sup> Τρόπος

**α.** Η απομάκρυνση  $y_A$  του σημείου  $A$  από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή  $t=1s$  μπορεί να είναι :  $y_A=\pm\sqrt{3}10^{-2}m$ . Από την εξίσωση του κύματος στη θέση  $A$  ( $x_A=+\frac{2}{3}m$ ) έχουμε:

$$\pm\sqrt{3}10^{-2}m = 210^{-2}\eta\mu 2\pi\left(\frac{1}{T}-\frac{2}{3\lambda}\right) \Rightarrow \eta\mu 2\pi\left(\frac{1}{T}-\frac{2}{3\lambda}\right) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

Η οποιαδήποτε προσπάθεια επίλυσης της προηγούμενης "διπλής" τριγωνομετρικής εξίσωσης οδηγεί σε μία σχέση με δύο αγνώστους, τα  $T$  και  $\lambda$ .

Η δεύτερη σχέση που χρειαζόμαστε θα μπορούσε να προκύψει από τη διαφορά φάσης των δύο πλησιέστερων σημείων που έχουν την ίδια ταχύτητα (διανυσματικά) και απέχουν  $\sqrt{3}10^{-2}m$  από τις

θέσεις ισορροπίας τους:  $\Delta\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \stackrel{d=\frac{4}{3}m}{\Rightarrow} \Delta\phi = \frac{8\pi}{3\lambda} \text{ rad}$ . Απαιτείται όμως ο υπολογισμός των φάσεων αυτών

των δύο σημείων τη χρονική στιγμή  $t=1s$  που πάλι είναι σε συνάρτηση με τους αγνώστους  $\lambda$  και  $T$ . Άρα;

Επιστροφή στα "θεμελιώδη". Δηλαδή στις πληροφορίες που δίνει η εκφώνηση για την αρμονική ταλάντωση του σημείου  $A$ . "Κρύβω" τους αγνώστους  $\lambda$  και  $T$  στην (1) θέτοντας για τη φάση του  $A$ :

$$\phi_A = 2\pi\left(\frac{1}{T}-\frac{2}{3\lambda}\right) \quad (\text{S.I}). \quad (2)$$

$$\text{Από την (1)} \Rightarrow \eta\mu\phi_A = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \phi_A = \kappa\pi + \frac{\pi}{3} & (3) \\ \phi_A = \kappa\pi - \frac{\pi}{3} & (4) \end{cases} \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{Από (3)} \quad \kappa=0 : \phi_{A_1} = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \quad (1^{\eta} \text{ φορά})$$

$$\kappa=1 : \phi_{A_3} = \frac{4\pi}{3} \text{ rad} \quad (3^{\eta} \text{ φορά})$$

$$\kappa=2 : \phi_{A_5} = \frac{7\pi}{3} \text{ rad} \quad (5^{\eta} \text{ φορά}) \quad (5)$$

Από (4)  $\kappa=0$  :  $\varphi_A < 0$  απορρίπτεται διότι αντιστοιχεί σε θέση όπου το κύμα δεν έχει φθάσει.

$$\kappa=1: \varphi_{A_2} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad} \quad (2^{\text{η}} \text{ φορά})$$

$$\kappa=2 : \varphi_{A_4} = \frac{5\pi}{3} \text{ rad} \quad (4^{\text{η}} \text{ φορά}) \quad (6)$$

Η φάση  $\varphi_{A_4} = \frac{5\pi}{3} \text{ rad}$  που αντιστοιχεί στην τέταρτη φορά δίνει:  $V_{A_4} = \omega A \sin \varphi_{A_4} = \omega A \sin \frac{5\pi}{3} > 0$

Οι πλησιέστερες τιμές φάσης απομάκρυνσης προς την τιμή  $\varphi_{A_4} = \frac{5\pi}{3} \text{ rad}$  που είναι  $\varphi_{A_3} = \frac{4\pi}{3} \text{ rad}$  και

$\varphi_{A_5} = \frac{7\pi}{3} \text{ rad}$  "αντιστοιχούν" και στις φάσεις των πλησιέστερων προς το σημείο A σημείων, που

απέχουν  $\sqrt{3} 10^{-2} \text{ m}$  από τη θέση ισορροπίας τους.

Όμως  $V_{A_3} = \omega A \sin \varphi_{A_3} = \omega A \sin \frac{4\pi}{3} < 0$  άρα απορρίπτεται ως πλησιέστερο στο  $A_4$ .

$V_{A_5} = \omega A \sin \varphi_{A_5} = \omega A \sin \frac{7\pi}{3} = \omega A \sin \left( 2\pi + \frac{\pi}{3} \right) = \omega A \sin \frac{\pi}{3} > 0$ . Συνεπώς το σημείο  $A_5$  είναι το πλησιέστερο σημείο προς το  $A_4$  (δηλαδή στο A) που έχει την ίδια ταχύτητα (διανυσματικά) με αυτό.

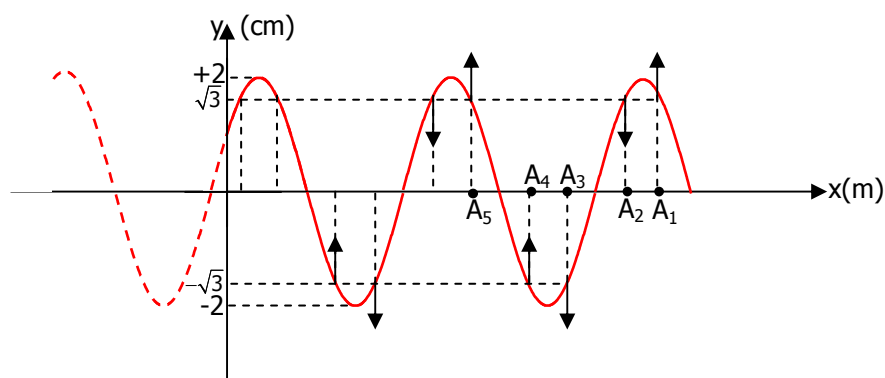
$$\text{Άρα } \Delta\varphi_{A_4 A_5} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2\pi \frac{d}{\lambda} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \lambda = 3d \Rightarrow \lambda = 4\text{m}.$$

$$\text{Από (2)} \Rightarrow \frac{5\pi}{3} = 2\pi \left( \frac{1}{T} - \frac{2}{3 \cdot 4} \right) \Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{2}{T} - \frac{1}{3} \Rightarrow T = 1\text{s}.$$

$$u = \frac{\lambda}{T} = \frac{4}{1} = 4\text{m/s}.$$

## 2<sup>ος</sup> τρόπος

Έστω ένα τυχαίο στιγμιότυπο του κύματος όπως αυτό του σχήματος, στο οποίο τα μαύρα βέλη είναι τα διανύσματα των ταχυτήτων των αντιστοιχών σημείων του μέσου.



Το κύμα μεταφέρει από σημείο σε σημείο του μέσου **την ίδια** αρμονική ταλάντωση. Ο "κάθε ταλαντωτής" αρχίζει να ταλαντώνεται προς τη θετική κατεύθυνση και **σε κάθε περίοδο T** απέχει για 1<sup>η</sup> φορά  $\sqrt{3} 10^{-2} \text{ m}$  από τη θέση ισορροπίας του όταν  $y = +\sqrt{3} 10^{-2} \text{ m}$  και  $V > 0$ , για 2<sup>η</sup> φορά όταν  $y = +\sqrt{3} 10^{-2} \text{ m}$  και  $V < 0$ , για 3<sup>η</sup> φορά όταν  $y = -\sqrt{3} 10^{-2} \text{ m}$  και  $V < 0$  και για 4<sup>η</sup> φορά όταν  $y = -\sqrt{3} 10^{-2} \text{ m}$  και  $V > 0$ , δηλαδή 4 φορές σε κάθε περίοδο. Ένας ταλαντωτής που απέχει για 4<sup>η</sup> φορά  $\sqrt{3} 10^{-2} \text{ m}$  από τη θέση ισορροπίας του είναι και ο  $A_4$  του στιγμιότυπου, ο οποίος θα μπορούσε να

αντιστοιχεί στο σημείο A της εκφώνησης. Ο πλησιέστερος προς αυτόν με την ίδια ταχύτητα (διανυσματικά) είναι ο  $A_5$ . Από το στιγμιότυπο προκύπτει ότι η απόσταση  $A_5A_4$  είναι μικρότερη από  $\frac{\lambda}{2}$ .

$$\text{Άρα } (A_5A_4) < \frac{\lambda}{2} \Rightarrow 2\pi(A_5A_4) < 2\pi\frac{\lambda}{2} \Rightarrow 2\pi\frac{(A_5A_4)}{\lambda} < \pi \Rightarrow \Delta\phi_{A_5A_4} < \pi. \quad (7)$$

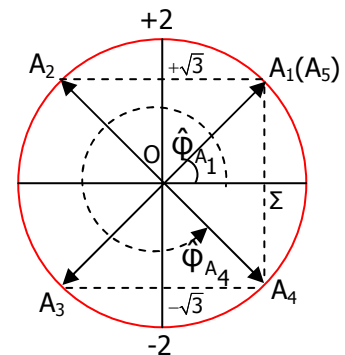
Οι τέσσερις διαφορετικές εκδοχές που ικανοποιούν την απαίτηση ένας ταλαντωτής να απέχει  $d = \sqrt{3} \cdot 10^{-2} \text{ m}$  από τη θέση ισορροπίας του, αντιστοιχούν και σε τέσσερα διαδοχικά

"σημεία – ταλαντωτές" του μέσου ( $A_1, A_2, A_3, A_4$ ) που απέχουν  $d = \sqrt{3} \cdot 10^{-2} \text{ m}$  από τη θέση ισορροπίας τους και βρίσκονται σε τμήμα μήκους  $\lambda$  του μέσου, που με τη σειρά του αντιστοιχεί σε χρόνο ταλάντωσης μιας περιόδου  $T$ .

Με τη βοήθεια του κύκλου αναφοράς (ή του περιστρεφόμενου διανύσματος) έχουμε:

$\Delta\hat{\phi}_{A_4A_5} = 2\hat{\phi}_{A_1}$ . Από το ορθογώνιο τρίγωνο  $A_1\Sigma O$ :

$\eta\mu\hat{\phi}_{A_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{\phi}_{A_1} = \frac{\pi}{3}$ . Άρα  $\Delta\hat{\phi}_{A_4A_5} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$ . Η τιμή αυτή επαληθεύει την συνθήκη (7).



$$\text{Αλλά } \Delta\hat{\phi}_{A_4A_5} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi d}{\lambda} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \lambda = 4\text{m}. \quad (8)$$

Όταν το σημείο A απέχει  $d = \sqrt{3} \cdot 10^{-2} \text{ m}$  από τη θέση ισορροπίας του για 4<sup>η</sup> φορά, τότε  $y_A = -\sqrt{3} \cdot 10^{-2} \text{ m}$

Από την εξίσωση του κύματος για τη θέση  $A(x_A = \frac{2}{3} \text{ m})$  έχουμε:

$$-\sqrt{3} \cdot 10^{-2} = 2 \cdot 10^{-2} \eta\mu 2\pi \left( \frac{1}{T} - \frac{2}{3\lambda} \right) \stackrel{(8)}{\Rightarrow} \eta\mu 2\pi \left( \frac{1}{T} - \frac{2}{3 \cdot 4} \right) = \eta\mu\hat{\phi}_{A_4} \Rightarrow 2\pi \left( \frac{1}{T} - \frac{2}{3 \cdot 4} \right) = \hat{\phi}_{A_4}. \quad (9)$$

$$\text{Από τον κύκλο αναφοράς προκύπτει ότι } \hat{\phi}_{A_4} = 2\pi - \hat{\phi}_{A_1} \Rightarrow \hat{\phi}_{A_4} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \hat{\phi}_{A_4} = \frac{5\pi}{3} \quad (10)$$

$$\text{Από (9) και (10) : } 2\pi \left( \frac{1}{T} - \frac{2}{3 \cdot 4} \right) = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow T = 1\text{s} \text{ και } u = \frac{\lambda}{T} = 4\text{m/s}.$$

## ΣΧΟΛΙΑ

**1.** Ο 1<sup>ος</sup> τρόπος λύσης δεν είναι απλά ένα μαθηματικό τέχνασμα, αλλά η υπενθύμιση ότι στην

εξίσωση ενός αρμονικού κύματος όπως αυτό που δίνεται στην εκφώνηση ο παράγοντας  $2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$

εκφράζει φάση απομάκρυνσης ταλάντωσης για κάθε διαφορετική τιμή της παραμέτρου  $x$ .

**2.** Ο 2<sup>ος</sup> τρόπος λύσης δεν είναι απλά η χρήση του κύκλου αναφοράς προς αποφυγή επίλυσης τριγωνομετρικής εξίσωσης. Η συσχέτιση του κύκλου αναφοράς με το στιγμιότυπο του κύματος δείχνει ότι "αυτό που κάνει **ένα** σημείο του μέσου σε χρόνο μιας περιόδου  $T$  το κάνουν **τέσσερα διαφορετικά** σημεία του μέσου που βρίσκονται σε μήκος μέσου  $\lambda$  σε τέσσερις διαφορετικές χρονικές στιγμές".